מטלת מנחה 13

## שאלה 1

תהי A קבוצה, עליה מוגדרת הפעולה .

נתון כי הקבוצה A סגורה ביחס לפעולה ומקיימת את חוקי הצמצום,

וידוע כי קיים : לכל מתקיים

### סעיף א

הטענה: e אינו בהכרח ניטרלי ביחס ל .

הוכחה:

כאשר ועליה מוגדרת פעולת החיסור:

סגורה ומקיימת את חוקי הצמצום:

מסגירות חיסור שלמים סגורה.

בנוסף פעולת החיסור תמיד מקיימת את חוקי הצמצום.

קיים : לכל מתקיים :

מקיים תמיד לכל :

אינו ניטרלי:

( או )0 אינו ניטרלי

### סעיף ב

הטענה: אם קיבוצית, אז e ניטרלי ביחס לפעולה .

הוכחה: יהיו איברים כלשהם

קיבוצית

לפי ההנחה .

לפי ההנחה, הפעולה מקיימת את חוקי הצמצום ובפרט חוק הצמצום השמאלי

ולכן ולפי ההנחה וגם e ניטרלי ביחס לפעולה .

## 

## שאלה 2

תהי חבורה ביחס לפעולה (כל האיברים שונים אלו מאלו)

נתון כי e הוא האיבר הניטרלי בG וגם .

כמו כן, הפעולה מקיימת את חוקי הצמצום.

### סעיף א

הטענה:

הוכחה: נניח בשלילה

לכן לפי ההנחה

ולכן אבל לפי ההנחה !

הטענה:

הוכחה: נניח בשלילה

לכן לפי ההנחה

לפי ההנחה e ניטרלית

הפעולה מקיימת את חוקי הצמצום אבל !

הטענה:

הוכחה: נניח בשלילה

לכן

לפי ההנחה e ניטרלית אבל !

### סעיף ב

הטענה:

הוכחה:

מסגירות G ( או או או )

לפי סעיף א, וגם וגם

ולכן

הטענה:

הוכחה:

לפי ההנחה,

לפי ההוכחה הקודמת

### סעיף ג

הטענה:

הוכחה: נניח בשלילה

לפי ההנחה e ניטרלית ביחס לפעולה

לפי ההנחה הפעולה מקיימת את חוקי הצמצום אבל !

הטענה:

הוכחה: נניח בשלילה

לפי סעיף ב,

לפי ההנחה הפעולה מקיימת את חוקי הצמצום אבל !

הטענה:

הוכחה: נניח בשלילה

לפי סעיף ב,

לפי ההנחה, הפעולה מקיימת את חוקי הצמצום אבל !

### סעיף ד

מניטרליות ושלושת הסעיפים הקודמים נובע כי זוהי טבלת הפעולה החלקית:

| e | c | b | a |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a | ? | ? | c | a |
| b | ? | ? | ? | b |
| c | ? | ? | b | c |
| e | c | b | a | e |

מכלל ה"ריבוע הלטיני" בטבלת פעולה של חבורה

בנוסף, מחילופיות איברים נגדיים בחבורה (הוכחנו בשיעור)

לכן מכלל הריבוע הלטיני

| e | c | b | a |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a | b | e | c | a |
| b | ? | ? | e | b |
| c | ? | ? | b | c |
| e | c | b | a | e |

לכל אחת מארבעת המשבצות הנותרות בטבלה, יש 4 אפשרויות שיבוץ: .

שיבוץ כל אחד מן האיברים ו במשבצת יוביל לסתירה עם חוקי הצמצום, שמתקיימים בוודאות בחבורה (שיבוץ האיבר , למשל, יגרום ל אבל !). באופן דומה תתקבל גם סתירה במשבצת . לכן בשתי משבצות אלה השיבוץ היחיד שלא יוביל לסתירה הוא שיבוץ .

לשם נוחות אעתיק את הטבלה החלקית פעם נוספת, בהוספת המידע החדש:

| e | c | b | a |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a | b | e | c | a |
| b | a | ? | e | b |
| c | ? | a | b | c |
| e | c | b | a | e |

ניתן לראות כי הדרך היחידה להימנע מסתירה עם כלל הריבוע הלטיני היא שיבוץ במשבצת ושיבוץ במשבצת . כל שיבוץ אחר, השונה מהשיבוץ בסעיף זה, יוביל לסתירה עם כלל הריבוע הלטיני ועם כללי הצמצום. לכן קיימת רק דרך אחת להשלים את השיבוץ, והיא:

| e | c | b | a |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a | b | e | c | a |
| b | a | c | e | b |
| c | e | a | b | c |
| e | c | b | a | e |

## 

## שאלה 3

### סעיף א

תהי קבוצת השלמים הזוגיים.

ותהי הפעולה מוגדרת על A כך:

לכל מתקיים .

טענה: סגורה.

טענת עזר: לכל מתקיים

הוכחת טענת העזר: יהיו

מסגירות חיבור שלמים

מסגירות כפל שלמים

ובאופן דומה .

מסגירות חיסור שלמים:

הוכחת הטענה:

יהיו איברים כלשהם.

לכן קיימים :

לכן מתקיים .

לפי טענת העזר, .

טענה: קיבוצית

הוכחה: יהיו איברים כלשהם.

לכן מתקיים

כמו כן,

כעת נניח בשלילה כי פסוקים אלה אינם שווים:

מחיסור משני אגפי אי-השוויון

מהוספת לשני אגפי אי השוויון אבל !

לכן בהכרח ( וגם סגורה) קיבוצית.

טענה: קיים איבר ניטרלי ב-A ביחס לפעולה .

הוכחה: יהי איבר כלשהו

לכן מתקיים

כמו כן, .

לכן 0 ניטרלי ביחס לפעולה .

טענה: לכל איבר בA קיים איבר הנגדי לו

הפרכה: לאיבר אין אף איבר שמתאים לו.

נניח בשלילה כי קיים :

לכן

נפתור את המשוואה:

אבל !

### סעיף ב

תהי הפעולה מוגדרת על כך:

לכל מתקיים .

טענה: סגורה

טענת עזר: לכל :

הוכחת טענת העזר: נניח בשלילה כי קיימים :

: וגם

ובפרט

לפי ההנחה

לכן

לאחר הצבת מתקבל כי ( או ) או ) אבל !

הוכחה:

לפי ההנחה

מסגירות חיבור רציונליים

מסגירות כפל רציונליים

מסגירות חיסור רציונליים

בנוסף לפי טענת העזר וגם )

טענה: קיבוצית

הוכחה:

יהיו איברים כלשהם.

לכן מתקיים

כמו כן,

כעת נניח בשלילה כי פסוקים אלה אינם שווים:

מחיסור משני אגפי אי-השוויון

מהוספת לשני אגפי אי השוויון אבל !

ולכן ( וגם סגורה) קיבוצית

טענה: קיים איבר ניטרלי

הוכחה:

יהי איבר כלשהו

לכן מתקיים

כמו כן, .

לכן 0 ניטרלי ביחס לפעולה .

טענה: לכל :

טענת עזר א: לכל :

הוכחת טענת עזר א:

יהי .

לכן קיימים : .

לכן

מסגירות כפל שלמים

באופן דומה .

מסגירות חיסור שלמים

וגם )

טענת עזר ב: לכל

הוכחת טענת עזר ב:

נניח בשלילה

לכן אבל !

הוכחה:

יהי

מוגדר היטב:

וגם וגם )

לכן לפי טענות העזר ( וגם )

ולכן מוגדר היטב.

.

### 

## שאלה 4

תהי G חבורה ביחס לפעולה

### סעיף א

הטענה: לכל קיים :

הוכחה:

יהיו

מוגדר היטב:

מקיום נגדיים ב.

מסגירות מוגדר היטב

חבורהקיים ניטרלי ב. נסמנו ב.

מקיבוציות .

### סעיף ב

הטענה: אם כל , המקיימים מקיימים גם , אז G חבורה חילופית.

הוכחה:

יהיו .

מסגירות G

מהטענה הקודמת קיים כלשהו :

לכן לפי ההנחה

חילופית( חילופית וגם חבורה) חבורה חילופית.